PROBLEMA 2: CONDENSADOR ESFÉRICO CON DOS DIELÉCTRICOS.

Se tiene un condensador constituido por dos conchas esféricas metálicas de radios *a* y *c* (*c*>*a*), un material dieléctrico ideal homogéneo de permitividad absoluta ε_1 en el volumen $b < r < c$ (*b*>*a*), $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \theta < 2\pi$, y un material dieléctrico ideal homogéneo de permitividad absoluta ε_2 en el volumen $a < r < b$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \theta < 2\pi$. Determinar el potencial electrostático dentro del capacitor y la capacitancia del dispositivo.

Solución.

Para determinar la capacitancia, hay que calcular la carga libre almacenada en la placa que esté conectada al positivo de la batería, lo que implica que hay que calcular el campo eléctrico dentro del sistema, el cual se obtiene a partir del potencial electrostático. Dada la geometría del sistema, el potencial sólo depende de la coordenada radial, por lo que la solución es la trivial:

$$\phi_1(r) = A + Br^{-1} \; (b < r < c)$$

$$\phi_2(r) = C + Dr^{-1} \; (a < r < b).$$

Suponiendo que la esfera externa está conectada a 0 V, y la interna a un potencial V_0, y no hay campo fuera del dispositivo, las condiciones de frontera para calcular el potencial son:

a) $\phi_1(c) = 0$

b) $\phi_2(a) = V_0$

c) $\phi_1(b^+) = \phi_2(b^-)$

d) $\varepsilon_1 \left.\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right|_{b^+} = \varepsilon_2 \left.\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right|_{b^-}$

Con estas condiciones de frontera, se obtienen los siguientes potenciales:

$$\phi_1(r) = \frac{V_0 \varepsilon_2 (c^{-1} - r^{-1})}{\varepsilon_1 (b^{-1} - a^{-1}) + \varepsilon_2 (c^{-1} - b^{-1})}$$

$$\phi_2(r) = \frac{V_0 \left[\varepsilon_2 (c^{-1} - b^{-1}) + \varepsilon_1 (b^{-1} - r^{-1})\right]}{\varepsilon_1 (b^{-1} - a^{-1}) + \varepsilon_2 (c^{-1} - b^{-1})}$$

La densidad de carga en el conductor situado en $r = a$ viene dada por:

$$\eta = \overline{1r} \cdot \left[\varepsilon_2 \overline{E}\Big|_{a^+} - \varepsilon_0 \overline{E}\Big|_{a^-} \right] = -\varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r}\Big|_{a^+} = \frac{V_0 \varepsilon_2 \varepsilon_1 a^{-2}}{\varepsilon_1 (b^{-1} - a^{-1}) + \varepsilon_2 (c^{-1} - b^{-1})}$$

Calculando la carga total, y dividiendo entre el voltaje, se tiene la capacitancia:

$$C = \frac{4\pi \varepsilon_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 (b^{-1} - a^{-1}) + \varepsilon_2 (c^{-1} - b^{-1})}$$